523. Quermassintegral ノ確率的意義

栗田　稔（東大學生）

n 次元 Euklid 空間 E_n 内ノ r 次元線狀空間 E_r ハソレニ含マレル任意ノ点 $\mathfrak{a}$ 及ビ之レヲトホル r 個ノ Vektor ノ正規直交系

$$(\mathfrak{U}) \quad \mathfrak{u}^{(1)} \text{-------} \mathfrak{u}^{(r)}$$

ニヨッテ決定サレル。更ニ $n-r=s$ 個ノ Vektor

$$(\mathfrak{V}) \quad \mathfrak{v}^{(1)} \text{-------} \mathfrak{v}^{(s)}$$

ヲトリ $(\mathfrak{U}),(\mathfrak{V})$ ガ E_n ノ完全正規直交系ナル様ニスル。

サテ Differential ハスベテ・ヲモツテアラハシ，又 Differential ノ積ハスベテ alternierend 即チ $\dot{a}\dot{b}=-\dot{b}\dot{a}$，$\dot{a}\dot{a}=0$ トスルトキ，r 次元平面 E_r ノ E_n 内デノ Dichte ハ

$$G_r=\prod_{j=1,\dots s}\nu^j \prod_{\substack{i=1,\dots r\\ k=1,\dots s}} p^{ik}$$

コヽニ　$\nu^j=(\mathfrak{v}^{(j)},\dot{\mathfrak{a}})$　$p^{ik}=(\dot{\mathfrak{u}}^{(i)},\mathfrak{v}^{(k)})$

（以上 W. Blaschke Integralgeometrie I Actualités scientifique 252 s.12ヨリ）

ソレデ E_n 内ニ konvexer Körper $\mathfrak{K}$ ガアルトキ之レヲキル E_r ノ Anzahl (Mass) ヲ M_r トスルトキハ

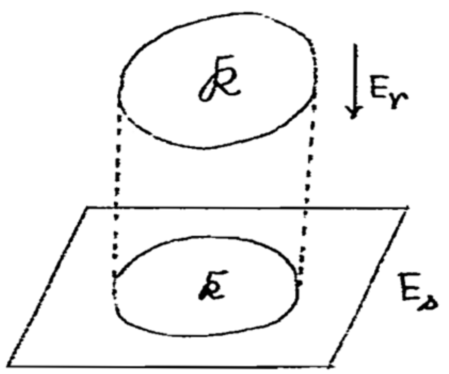
$$M_r=\int_{\mathfrak{K}E_r\neq 0} G_r=\int_{\mathfrak{K}E_r\neq 0}\pi\nu^j\pi p^{ik}$$

之レヲ計算スルノニ先ヅ $\mathfrak{v}^{(1)}$------- $\mathfrak{v}^{(r)}$ / $\mathfrak{w}^{(1)}$------- $\mathfrak{w}^{(s)}$ ヲ固定シテ $\mathfrak{v}$ ノミニ

ツイテノ積分

$$m=\int \Pi \nu^{j}$$

ヲ考ヘル。コノトキ積分範囲ハ（∇）ノ定メル s 次元平面 E_s 上ヘノ $\mathfrak{K}$ ノ正射影ニ他ナラナイ。コノ正射影ヲ $\mathfrak{k}$ トスル



トキ $\mathfrak{k}$ ガ E_s 上ノ konvexer Körper デアルコトハ明ラカデアル。

サテ $\Pi \nu^{j}$ ハ Drehung ニ對シテ不変（上記 Blaschke I, S.13）デアルカラ適當ニ施シテ

$$\mathfrak{w}^{(1)}=(1,0,\text{----}0)$$

$$\mathfrak{w}^{(2)}=(0,1,0,\text{----})\text{-------}\mathfrak{w}^{(s)}=(0,\text{-------}0,\underset{s\text{番目}}{1},0,\text{-------}0)$$

トスルトキ $\nu^{j}=\dot{x}_j$ トナリ

$$\Pi \nu^{j}=\dot{x}_1\text{-------}\dot{x}_s$$

従ッテ $m=\int \dot{x}_1\text{-------}\dot{x}_s=\mathfrak{k}$ ノ s 次元ノ体積

之レヲ $\sigma(\mathfrak{v}^{(1)}\text{-------}\mathfrak{v}^{(\nu)})$ トカクト

$$\text{(A)}\quad M_r=\int \sigma(\mathfrak{v}^{(1)}\text{-------}\mathfrak{v}^{(r)})\,\Pi p^{iK}$$

次ニ γ ヲ E_n 内ノ単位球トスレバ $\mathfrak{K}+\lambda\gamma$ ノ体積ハ

$$V(\mathfrak{K}+\lambda\gamma)=W_0+n\lambda W_1+\text{------}+\binom{n}{\nu}\lambda^{\nu}W_\nu+\text{------}$$
$$\text{-----}+\lambda^{n}W_n$$

Bonnesen und Fenchel: Theorie der Konvexen

Körper S. 49 Formal (4) ニヨレバ（ソコデ $\frac{1}{n}$ ガオチテキル）.

$$W_\nu(\mathfrak{K}) = \frac{1}{n K_{n-1}} \int W'_{\nu-1}(\mathfrak{K}\mathfrak{u})\, d\omega$$

コヽニ $W'_{\nu-1}(\mathfrak{K}\mathfrak{u})$ ハ $\mathfrak{K}$ ノ $\mathfrak{u}$ 方向ヘノ正射影（之モ konvexer Körper）ノ $W_{\nu-1}$ ヲアラハシ $d\omega$ ハ γ ノ $\mathfrak{u}$ 方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement, K_{n-1} ハ $n-1$ 次元単位球ノ体積デアル．（窪田博士：東北理科報告 Bd. 14 参照）

コノ Formal ヲ繰返シ用ヒテ

$$W_r(\mathfrak{K}) = \frac{1}{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)K_{n-1}\cdots K_{n-r}} \int W_0^{(r)}(\mathfrak{K}\mathfrak{u}^{(1)}\cdots\mathfrak{u}^{(r)})\, d\omega_1\cdots\cdots d\omega_r$$

但シ $d\omega_\nu$ ハ原点ヲトホル $\mathfrak{u}^{(\nu+1)}\cdots\cdots\mathfrak{u}^{(r)}$ ニ垂直ナ平面内デノ $s+\nu$ 次元単位球ノ $\mathfrak{u}^{(\nu)}$ ナル方向ノ半径ノ端デノ Flächenelement デアル。

ソコデ先ヅ $d\omega_1$ ヲ考ヘルトキ適当ニ Drehung ヲ行ツテ

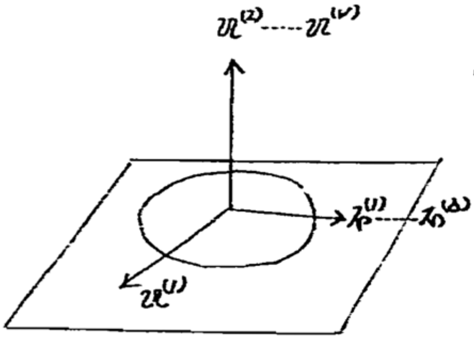
$$\mathfrak{u}^{(2)} = (0,\cdots\cdots 0, \overbrace{1, 0\cdots\cdots 0}^{r-1})$$

$$\mathfrak{u}^{(3)} = (0,\cdots\cdots 0, \overbrace{1, 0\cdots\cdots 0}^{r-2})\cdots\cdots\mathfrak{u}^{(\nu)} = (0,\cdots\cdots 0, 1)$$

トスレバ

$$d\omega_1 = \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i+1} u_i^{(1)}\, \dot{u}_1^{(1)}\cdots\cdots\dot{u}_{i-1}^{(1)}\, \dot{u}_{i+1}^{(1)}\cdots\cdots\dot{u}_{s+1}^{(1)}$$

$\mathfrak{u}^{(1)}\mathfrak{w}^{(1)}\cdots\cdots\mathfrak{w}^{(s)}$ ハ正規直交系ヲナスカラ



$$dw_1 = \sum (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} \cdots v_{i-1}^{(1)} & v_{i+1}^{(1)} \cdots v_{s+1}^{(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_1^{(s)} \cdots v_{i-1}^{(s)} & v_{i+1}^{(s)} \cdots v_{s+1}^{(s)} \end{vmatrix} \dot{u}_1^{(1)} \cdots \dot{u}_{i-1}^{(1)} \dot{u}_{i+1}^{(1)} \cdots \dot{u}_{s+1}^{(1)}$$

$$= (\dot{u}_1^{(1)} v_1^{(1)} + \dot{u}_2^{(1)} v_2^{(1)} + \cdots\cdots + \dot{u}_{s+1}^{(1)} v_{s+1}^{(1)}) \cdots$$

$$\cdots\cdots (\dot{u}_1^{(1)} v_1^{(s)} + \cdots\cdots + \dot{u}_{s+1}^{(1)} v_{s+1}^{(s)})$$

$$= (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)} \mathfrak{w}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(1)} \mathfrak{w}^{(2)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)} \mathfrak{w}^{(s)})$$

Skalarprodukt ハ Drehung ニ對シテ不變ダカラ一般ノ位置デ

$$dw_1 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)} \mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(1)} \mathfrak{w}^{(s)})$$

dw_2 ノトキモ大体同様ニシテ

$$dw_2 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)} \mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)} \mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(2)} \mathfrak{u}^{(1)})$$

以下同様ニ

$$dw_3 = (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)} \mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(3)} \mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)} \mathfrak{u}^{(1)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(3)} \mathfrak{u}^{(2)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dw_r = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{w}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{w}^{(s)})(\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{u}^{(r-1)})$$

ソレ故

$$(B) \qquad dw_1 \cdots\cdots dw_r = \prod_{\substack{i=1,\cdots r \\ K=1,\cdots s}} p^{iK} \cdot S$$

コヽニ $S = (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{u}^{(1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(r)} \mathfrak{u}^{(r-1)}) \cdots\cdots (\dot{\mathfrak{u}}^{(2)} \mathfrak{u}^{(1)})$

即チ S ハ上記 Blaschke I, S. 14 ノ sphärische Kinematik ノ Mass ニ對スル Dichte ニ他ナラナイ. 又

$$\sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(\nu)}) = w_0^{(r)}(\mathfrak{K}\, v_+^{(1)}\cdots\cdots v^{(r)})$$

ダカラ (B) ヲ (A) ニ入レルトキハ

$$W_r(\mathfrak{K}) = c_r\int\sigma(u^{(1)}\cdots\cdots u^{(r)})\,\Pi p^{ik}\cdot S$$

$$= c_r\int\Big[\int G_r\Big]\,S.$$

$\int G_r$ ハ S ニハ無関係デアルカラ

$$= c_r\int S\int G_r$$

又上ニノベタコトト同ジ様ニシテ

$$\int S = \omega_r\,\omega_{r-1}\cdots\cdots\omega_2$$

但シ、ω_ν ハ ν 次元単位球ノ表面積

ソレデ

$$W_r(\mathfrak{K}) = c_r'\int G_r$$

$$c_r' = \frac{(n-r)\,\omega_r\cdots\cdots\omega_1}{n\cdot(n-1)\,\mathcal{K}_{n-1}\cdots\cdots(n-r)\,K_{n-r}}$$

$$= \frac{n-r}{n}\;\frac{\omega_r\cdots\cdots\omega_1}{\omega_{n-1}\cdots\cdots\omega_{n-r}}$$

即チ $\mathfrak{K}$ ノ Quermassintegral W_r ハ r ニノミ関係スル Faktor ヲノゾイテハ $\mathfrak{K}$ ニ交ハル平面 E_r ノ Mass ニ等シイ。

従ッテ E_2, E_3 ニ於テ Crofton ノエタ結果ハ一般ノ次元ニ擴張サレタコトニナル。(例ヘバ W. Blaschke: Differentialgeometrie I: 2 Aer aufl. S. 164 参照)

系トシテ E_n 内ニ二ツノ閉曲面 $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ (konvex デナ

クテモイヽ）ガアツテ $\mathfrak{K}_1$ ハ $\mathfrak{K}_2$ ニ含マレテヰルトスル、ソノトキ $\mathfrak{K}_2$ ヲキル r 次元平面ガ $\mathfrak{K}_1$ ヲモキル確率ハ

$$\frac{W_r(\overline{\mathfrak{K}}_1)}{W_r(\overline{\mathfrak{K}}_2)}$$

デアル．但シ $\overline{\mathfrak{K}}_1$, $\overline{\mathfrak{K}}_2$ ハ夫々 $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ノ konvexe Hülle デアル。

以上 —— 11. 11. 25 ——